Möbius (1790–1868)

Eduard Recasens
Doctor en Ciències (Matemàtiques)

Prefaci

Abans de la unificació alemanya, el gener del 1871, el territori europeu que avui és Alemanya estava format per un irregular mosaic d'estats independents que compartien una mateixa llengua i certes tradicions culturals. Al segle XVIII i iniciat el XIX, la matemàtica que s'ensenyava a les escoles i a les universitats de la majoria d'aquests estats tenia un nivell molt baix i la recerca matemàtica estava principalment reservada a les acadèmies de ciències. Això, però, començaria a canviar a partir de la primera dècada del segle XIX com a conseqüència dels aires liberals que van córrer per Europa a partir de la Revolució francesa. La majoria dels estats alemanys van decidir impulsar els estudis i la recerca tecnològica i científica, i en particular van incloure la matemàtica com una de les assignatures bàsiques en els programes educatius, amb la novetat que es va considerar que la matemàtica no tan sols era una eina instrumental bàsica per a la ciència i la tecnologia, sinó també una disciplina de gran valor formatiu per desenvolupar la capacitat racional dels individus. Això va fer que Alemanya augmentés considerablement en el nombre de matemàtics, recordem el nom d'alguns d'ells: Gauss, Pfaff, von Staudt, Feuerbach, Möbius, Plücker, Steiner, Grassmann, Hesse, Riemann, Frobenius, Dirichlet, Dedekind, Kronecker, Cantor, Bessel, Jacobi, Kummer, Weierstrass, Klein, Hilbert, aquests matemàtics, entre d'altres, van obrir bona part dels camins que després seguirien els matemàtics europeus del XX.

Just a l'inici d'aquest gran desenvolupament de la matemàtica alemanya del XIX és on cal situar la figura d'August Ferdinand Möbius.

Trets biogràfics

Möbius va néixer a l'estat de Saxònia, a Schulpforta, el 17 de novembre de 1790. Schulpforta era, i encara és, una escola que ocupa un antic monestir medieval cistercenc, situat uns 50 quilòmetres al sud-oest de Leipzig. El pare de Möbius hi treballava com a professor de dansa i, a més hi tenia la casa. Al cap de tres anys d'haver nascut Möbius, però, va morir. La mare va traslladar-se a viure a la ciutat propera de Naumburg i es va fer càrrec de la instrucció del seu únic fill fins que va fer 13 anys, llavors, va decidir ingressar-lo a Schulpforta. En aquest primer període escolar, Möbius ja va començar a mostrar un gran interès per les matemàtiques. Amb tot, el 1809, com que li havien aconsellat que fes Dret, va entrar a la Universitat de Leipzig amb aquest propòsit, però, pocs mesos després, va deixar el Dret i va decidir fer Matemàtiques, allò que ell desitjava de debò.

Va tenir Moritz von Prasse de matemàtiques, Ludwig Wilhelm Gilbert de física i Karl Mollweide d'astronomia. Mollweide era un astrònom de certa fama i Möbius va poder treballar amb ell com a assistent. El 1813, va aconseguir una beca per anar a Göttingen i va poder assistir als cursos d'astronomia que

Gauss impartia. Entre ells dos es va establir una bona relació i Gauss el va recomanar per ocupar un lloc a l'Obsevatori Astronòmic de Leipzig. Després de Göttingen, Möbius va visitar la Universitat de Halle i va assistir a les clases de matemàtiques de J.F. Pfaff.

El 1814 va defensar la seva tesi doctoral *De computandis occultationibus fixarum per planetas* a la Universitat de Leipzig i el 1815, per aconseguir el certificat que li havia de permetre exercicir la docència, va presentar la memòria *De peculiaribus quibusdam aequationum Trigonometricarum affectionibus*.

El 1814 quan va morir Von Prasse, va quedar vacant la plaça de matemàtiques que tenia a la Universitat de Lepzig, i aleshores Möbius va pensar que podria ocupar-la però això no va ser possible ja que Mollweide va deixar l'astronomia per poder ocupar la plaça de matemàtiques.

De totes maneres Möbius havia decidit quedar-se a viure a Leipzig i volia ser professor de la seva universitat, cosa que va aconseguir però, durant molts anys, va haver de romandre en un lloc de poca categoria acadèmica en l'escala professional perquè les places que sortien per promocionar estaven totes fora de Leipzig.

El 1816, va acceptar l'encàrrec de la Universitat de Leipzig per substituir Mollweide en les classes d'astronomia i aquest mateix any també va acceptar entrar a l'Observatori Astronòmic de Leipzig en qualitat d'observador.

Gran part de la seva vida va ocupar aquest dos llocs de treball fins que el 1844, quan ja tenia 54 anys, la Universitat de Lepzig el va ascendir a catedràtic i quatre anys després, el 1848, va ser nomenat director de l'Observatori. Quan Möbius havia arribat a l'Observatori per primera vegada, es trobava en pèssimes condicions però amb el temps va aconseguir revifar-lo. Va restituir bona part del material obsolet i va promocionar l'afició a l'astronomia amb la impartició de conferències i publicacions de tipus divulgatiu.

Möbius va viure amb la seva mare fins que va morir, el 1820. Poc després, va decidir casar-se amb Johanna Rothe, la qual, malauradament, al cap de poc va perdre la visió. Amb ella van formar una família composta per una filla i dos fills.

Malgrat que en el període en què va viure Möbius Europa va experimentar grans canvis, com a conseqüència de fets com la Revolució francesa, l'expansió napoleònica, les revoltes liberals etcètera, la vida de Möbius va transcórrer amb tota regularitat a la seva estimada Leipzig, entre classes, observacions astronòmiques i recerca matemàtica.

Els seus contemporanis el descriuen com un home senzill, reservat i de caràcter molt pacífic, totalment dedicat a la feina i la seva família. Va morir el 26 de setembre de 1868; fins aquest mateix any havia estat fent classes a la Universitat de Lepzig, tenia 78 anys.

Sobre alguns dels mètodes i resultats originals de Möbius

Els escrits matemàtics de Möbius estan recollits en els quatre volums que formen la seva obra completa, *Gesammelte Werke*, editada a Leipzig per R. Baltzer, F. Klein i W. Scheibner en el període 1885–1887.

Aquesta obra recull tres llibres i una gran quantitat d'articles que Möbius va escriure sobre matemàtiques i astronomia. Els llibres són:

- *Der barycentrische Calcul* (1827)
- *Lehrbuch der Statik* (1837)
- *Die Elemente der Mechanik des Himmels* (1843)

El càlcul baricèntric: una nova eina per al tractament analític de la geometria

Der barycentrische Calcul: Ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie (1827).

Aquest és el títol complet del llibre en què Möbius presenta via l'àlgebra un estudi de la geometria del pla i de l'espai des d'una perspectiva projectiva. Situat a Alemanya a la dècada del 1820, tant pel tema com pel mètode, el llibre era totalment innovador.

El redescobriment a inicis del segle XIX del tractament projectiu de la geometria es deu al matemàtic francès Victor Poncelet. Ara bé, l'iniciador d'aquesta visió projectiva de la geometria es deu a un altre matemàtic, també francès, del segle XVII, ens referim a Gerard Desargues, qui, l'any 1639, va exposar la seva visió en el llibre *Brouillon Projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*. Llibre que va llegir Descartes, que va

felicitar Desargues pel seu contingut però li va fer una observació: l'intrincat llenguatge en què estava escrit dificultaria la seva comprensió i li pronosticava que, si no el canviava, seria llegit per molt pocs. Desargues no va canviar res i es va complir allò que havia previst Descartes. Van ser molt pocs els qui van introduir mètodes projectius en les seves recerques (Pascal, La Hire, Newton) i la geometria projectiva va haver d'esperar millors temps. Aquests van arribar a la tercera dècada del segle XIX quan, Victor Poncelet, que havia escoltat les cèlebres lliçons de geometria descriptiva que Gaspard Monge impartia a l'École Polytechnique de Paris, va introduir mètodes projectius a la geometria ordinària i el 1822 va publicar *Traitré des propiétés projectives des figures*, el llibre que obriria les portes a l'imperi de la geometria projectiva per més de cent anys. La geometria projectiva va tenir una gran acceptació entre els geòmetres francesos i, com que en aquells moments París marcava la moda, la geometria projectiva ràpidament es va estendre pel continent. No és, doncs, casual que el jove Ferdinand Möbius, desprtés de llegir els geòmetres francesos, s'interessés pel nou enfocament projectiu.

La novetat que Möbius introduí en les seves recerques projectives fou la introducció del llenguatge algebraic per tractar els conceptes i resultats projectius, mentre que Poncelet havia utilitzat la via sintètica, Möbius va optar per la via analítica i no pas l'ús del sistema cartesià de representació, sinó mitjançant el nou sistema de coordenades concebut per ell mateix, que li resultava més útil per al tractament projectiu de la geometria.

En Möbius un punt P del pla es representa per tres coeficients numèrics a, b, c, no tots simultaneament nuls, i, uns tres coeficients més a', b', c' representen el mateix punt P si els nous coeficients són proporcionals als primers. És a dir, un punt del pla de Möbius, que és el pla projectiu real, és una recta homogènia $\lambda(a, b, c)$ $\lambda \neq 0$ a l'espai. D'aquesta manera, els punts de l'infinit, que en el tractat sintètic de Poncelet són punts ideals afegits al pla ordinari, en el tractament analític de Möbius són punts com els altres.

La representació coordenada homogènia dels punts se li va ocórrer a Möbius a partir dels estudis en estàtica de l'equilibri que va fer. Va confirmar que qualsevol punt de l'interior d'un triangle ABC podia ser el centre de gravetat G dels tres vèrtexs A, B, C si en aquests vèrtexs es col·locaven pesos convenients: un pes a en el vèrtex A, un pes b en el vèrtex B i un pes c en el vèrtex C, i que la posició del centre de gravetat G no variava si es canviaven els pesos a, b, i c per uns altres pesos que fossin proporcionals a aquests últims.

Això li va fer veure que cada punt G de l'interior del triangle quedava determinat per una terna de nombres λa, λb, λc, en què λ era un nombre arbitrari no nul. Històricament, el mèrit de Möbius és el d'haver sabut transportar aquest fet físic al camp de la geometria per mitjà de l'àlgebra.

Per poder estendre la representació coordenada a tots els punts del pla, Möbius utilitza coeficients positius i negatius. Utilitza l'expressió algebraica

$$a\,A + b\,B + c\,C$$

per representar un punt genèric S de coordenades a, b, c respecte d'una referència formada per tres punts no alineats A, B, C.

I es compleix la igualtat fonamental

$$a\,A + b\,B + c\,C = (a + b + c)\,S.$$

Les coordenades estan determinades a menys d'un factor multiplicatiu no nul λ, això és, si (a, b, c) són les coordenades de S, també ho són $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$, Möbius no ho escriu en forma de ternes, sinó que dirà que es conserven les raons entre les tríades de coordenades que representen un mateix punt; hem de recordar que en la primera meitat del segle XIX encara no s'utilitza el llenguatge vectorial. En aquest aspecte, cal dir que Möbius és un dels primers que distingeix el segment AB del segment BA, de manera que $AB + BA = 0$ i estableix sentits de recorregut per calcular àrees i volums orientats.

Per treballar en l'espai tridimendsional la referència baricèntrica estarà formada pels quatre vèrtexs d'un tetraedre.

Al llarg del llibre s'estudia la raó doble de quatre punts, les transformacions projectives entre dos espais que anomena colineacions, les còniques, la dualitat, estudia les corbes i superfícies de l'espai expressant les quatre coordenades d'un punt de l'espai com a funcions racionals d'un paràmetre, etc.

Antecedents del càlcul baricèntric

En diferents moments de la història s'ha utilitzat el centre de gravetat i les propietats de l'equilibri estàtic com a eina de càlcul matemàtic, però no sempre s'ha utilitzat de la mateixa manera.

El testimoni més antic el trobem en Arquimedes, que va calcular àrees i volums gens trivials fent servir la llei de la palanca; de fet, Arquimedes va calcular les primeres integrals *avant la lettre*. Alguns geòmetres europeus del XVI i del XVII també van recórrer al centre de gravetat per calcular àrees i volums i fins i tot l'austríac Paul Guldin va escriure Centrobaryca, tot un tractat sobre aquesta temàtica.

Ara bé, a l'últim terç del segle XVII, apareixen amb quatre anys de diferència dos llibres en què es fa servir el centre de gravetat i les seves propietats, no pas per calcular àrees i volums, sinó per trobar raons entre segments, originats per transversals en certes figures geomètriques.

Conceptualment, el càlcul baricèntric que presentaven aquests dos llibres era un antecedent clar del mètode baricèntric de Möbius, però aquests dos llibres, innovadors en el mètode i els resultats, van passar desapercebuts per als matemàtics del XVII i del XVIII.

Cronològicament, el primer llibre és *Geometria Magna in Minimis* del castellonenc Josep Saragossà, que es publica l'any 1674.

El segon llibre és *De lineis rectis se invicem secantibus: statica constructio* del milanes Giovanni Ceva, publicat l'any 1678.

Pel que fa a la fonamentació geomètrica, hi ha una diferència bàsica entre aquests dos llibres. Mentre que el llibre de Ceva és una obra de geometria que es fonamenta en les propietats de l'equilibri estàtic, el llibre de Saragossà és un llibre de geometria pura, ja que només es basa en els *Elements* d'Euclides, Saragossà construeix amb tot rigor un punt geomètric, que anomena *centre mínim*, les propietats geomètriques del qual són clavades a les del centre de gravetat de la física.

Mentre Ceva associa «pesos» als punts, Saragossà associa als punts «classes de rectangles homotètics». Els «pesos» (Ceva) i els «rectangles homotètics» (Saragossà) fan el paper de les coordenades homogènies de Möbius.

És en aquest context que apareix la relació entre segments que avui atribuïm a Ceva (teorema de Ceva), però aquesta mateixa relació ja es troba quatre anys abans a la *Geometria Magna in Minimis* de Saragossà. Les demostracions de Saragossà i Ceva són idèntiques, menys en el llenguatge.

Ceva va tenir la sort que, al segle XIX, el seu llibre fos conegut pel geòmetra francès M. Chasles qui, en el seu llibre *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837), va destacar l'original mètode de Ceva per calcular raons de segments originats per transversals en els costats d'una figura. Els comentaris de Chasles van aportar a la llum el fins llavors desconegut Giovanni Ceva. Per contra, la *Geometria Magna in Minimis* de Saragossà, ha estat desconeguda fins als nostres dies; escrita i publicada en una Espanya tancada en si mateixa i amb un migrat nivell matemàtic, va quedar totalment arraconada ja que segurament pocs la devien llegir i encara menys entendre.

Lehrbuch der Statik (1837)

En aquest llibre, Möbius presenta un estudi geomètric de l'estàtica. Möbius segueix en la línia del matemàtic contemporani francès Louis Poinsot, que ja havia escrit sobre la geometrització de l'estàtica el 1804. Un resultat fonamental era que tot sistema de forces era reduïble a un sistema equivalent format per una sola força aplicada a un punt O i un parell de forces respecte d'un eix que passa per O.

Una de les més notables aportacions de Möbius en aquest llibre és la següent: considera un sistema de forces a l'espai tridimensional, llavors, donat un punt M considera el feix de rectes que passen per M i es pregunta com variarà el moment del sistema respecte de cadascuna d'aquestes rectes, troba la recta del feix respecte de la qual el moment del sistema tindrà un valor màxim (eix) i demostra que tindrà valor zero per a aquelles rectes del feix contingudes al pla per M perpendicular a l'eix, «pla nul» corresponent al punt M. Recíprocament, troba que cada pla de l'espai és el «pla nul» d'un dels seus punts, a aquest punt l'anomena el *punt nul* del pla considerat.

La correspondència entre punt nul i pla nul és biunívoca i defineix una correlació en

l'espai tridimensional de matriu antisimètrica que s'anomena *sistema nul*.

En un sistema nul, a cada recta r li correspon una recta dual r', que és la recta intersecció de tots els plans nuls corresponents als punts de la recta r.

La correlació sistema nul és un tipus de dualitat diferent de la que Möbius havia formulat al càlcul baricèntric a partir d'una quàdrica, en aquest cas la matriu era simètrica. Möbius no utilitza el càlcul matricial, que encara està per fer, però fa els càlculs oportuns.

La banda de Möbius

El nom *Möbius* és força conegut fora de les matemàtiques gràcies a una bonica superfície no orientable d'una sola cara i un sol contorn, la banda de Möbius.

August Ferdinand Möbius va descobrir aquesta superfície el mes de setembre de l'any 1858 en el curs d'una investigació sobre poliedres que havia proposat l'Acadèmia de Ciències de París. Ara bé, en paral·lel hi va haver un altre matemàtic, Johann Benedict Listing, un alumne de Gauss, que l'havia trobat dos mesos abans, però aquesta superfície no va rebre el seu nom, sinó el de Möbius.

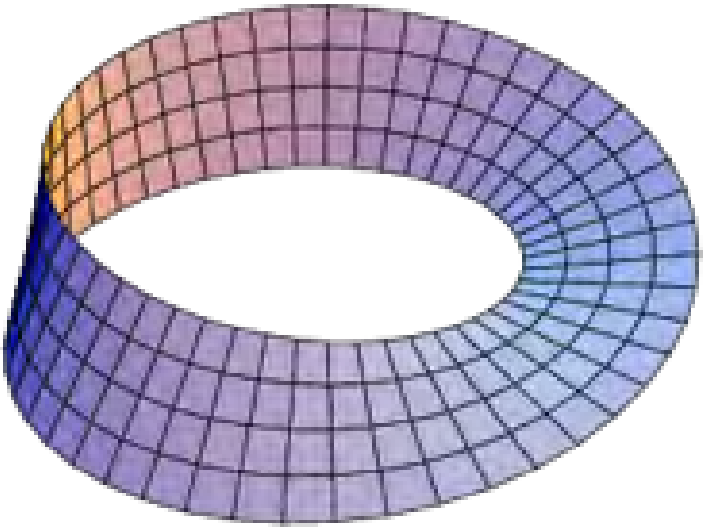
Hi ha una dita popular en matemàtiques que diu que si un teorema porta nom d'algú, és molt probable que aquest algú no sigui el primer descobridor.

Llibres utilitzats:

[1] Crowe Michael J. (1970–1980) *Dictionary of Scientific Biography*. Scribner's Sons: New York.

[2] Fauvel John, Gray Jeremy. *Möbius and his band*, (1993) Oxford University Press.

[3] Klein Felix. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Geometry*, (2004) Dover edition.

[4] Möbius, Ferdinand. *Der barycentrische Calcul* (1827) Leipzig.

[5] Recasens, Eduard. *J. Zaragoza's Centrum Minimum, an Early Version of Barycentric Geometry. Archive for History of Exact Sciences* Volume 46 (1994), Number 4, Springer-Verlag.